653. D’Amore B., Marazzani I. (2008). L’angolo, oggetto matematico e modello spontaneo. *La matematica e la sua didattica*. Vol. 22, n° 3, 285-329. ISSN: 1120-9968.

L’angolo, oggetto matematico e modello spontaneo

Bruno D’Amore - Ines Marazzani
NRD
Dipartimento di Matematica dell’Università di Bologna

Summary. *In the course of millennia mathematics worked out a certain quantity of definitions of the object “plane angle”. Some of them are deeply different from one another. Even if in classrooms at the present time one of them dominates, it doesn’t mean that it is the only correct one. On the contrary, we cannot exclude that spontaneously young pupils prefer to resort to one of the others even if they haven’t been used or recalled in the classroom. The aim of this article is to show that in reality things really work in this way; we present 8 different definitions of angle and we show how in individual interviews, students of different ages before and after the introduction of one of them in the classroom spontaneously refer to the others*.

Sunto. *Nel corso dei millenni, la matematica ha elaborato una certa quantità di diverse definizioni dell’oggetto “angolo piano”. Alcune di esse sono profondamente diverse tra loro. Anche se nelle aule italiane ne domina attualmente una, non è detto che sia l’unica esatta (in altri Paesi, ne sono diffuse altre). Anzi, potrebbe non essere escluso che, spontaneamente, giovani allievi preferiscano fare ricorso ad una delle altre, anche se non sono state usate o richiamate in aula. Scopo di questo articolo è di mostrare che, di fatto, le cose stanno davvero così; vengono presentate 8 diverse definizioni di angolo e si mostra come, in colloqui individuali, studenti di diverse età, prima e dopo la presentazione di una di esse in aula, facciano spontaneamente riferimento alle altre.*

Resumen. *En el curso de los milenios, la matemática ha elaborado un cierto número de definiciones diversas del objeto “ángulo plano”. Algunas de estas son profundamente diferentes entre ellas. Incluso si en el aula se privilegia sólo una, no se puede afirmar que sea la única exacta. Es más, puede ser que, espontáneamente, los jóvenes alumnos prefieran hacer recurso a una de las otras, aunque estas no hayan sido usadas o nombradas en el aula. El objetivo* *de este artículo es el de mostrar que, de hecho, las cosas están así; se presentan 8 definiciones diferentes de ángulo y se muestra como, en coloquios individuales, estudiantes de edades diversas, antes y después de la presentación de una de estas en el aula, hacen referencia espontáneamente a las otras*.

Resumo. *No decorrer dos milênios, a matemática elaborou certa quantidade de definições diferentes para o objeto "ângulo plano". Algumas delas são profundamente diferentes entre si. Embora nas salas de aula italianas predomine atualmente uma delas, não é dito que seja a única exata (em outros países, outras são mais comuns). Ao contrário, não se exclui a possibilidade de que, espontaneamente, alguns jovens estudantes prefiram recorrer a uma das outras definições, mesmo que não tenha sido utilizada ou mencionada na aula. O objetivo deste artigo é mostrar que, de fato, as coisas se encontram dessa maneira. São apresentadas 8 diferentes definições de ângulo e mostra-se como, em conversas individuais, estudantes de diversas idades, antes e depois da apresentação de uma delas na aula, referem-se às outras de modo totalmente espontâneo.*

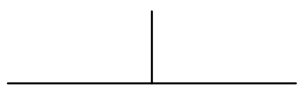
Résumé. *Pendant les millénaires les mathématiques ont élaboré un certain nombre de différentes definitions de l'objet "angle plan". Certaines d'entre eux sont bien différentes. Même si dans les classes il y en a une qui domine, il n'est pas dit qu'elle soit la seule correcte. Il n'est pas du tout à exclure que, spontanément, des jeuns élèves préfèrent employer une des autres definitions qui n'ont pas été présentées ou rapplées en classe. Le but de cet article c'est de démontrer que, en effet, les choses se passent comme ça; on présente 8 différentes definitions d'angle et on montre que, pendant des colloques individuels, étudiants d'âges diverses, tôt ou tard et après la présentation en classe de l'une d'entre elles, recourent spontanément aux autres.*

Zusammenfassung. *Während der Jahrtausende, in Mathematik, hat man eine Reihe von unterschiedlichen Definitionen des "ebenen Winkels" bearbeitet. Einige von ihnen sind auseinander sehr verschieden. Auch wenn während der Unterrichtsstunden nur eine bestimmte Definition verwendet wird, ist es nicht gesagt, dass sie die einzige richtig ist. Es kann passieren, dass sich spontan junge Schüler eine der anderen korrekten Definitionen benutzen, die in der Unterrichtsstunden noch nicht vorgelegt worden ist. Das Ziel dieses Artikels ist es zu zeigen, daß in der Tat genau so passiert; man stellt 8 verschiedenen Definitionen von Winkel vor und man zeigt, dass während einzelner Kolloquien, Studenten aus verschiedenen Altersgruppen, früher oder später und nach der Präsentation in den Unterrichtsstunden einer bestimmten Definition, spontan sich um andere Definitionen greifen.*

1. Introduzione

1.1 Definizioni di angolo

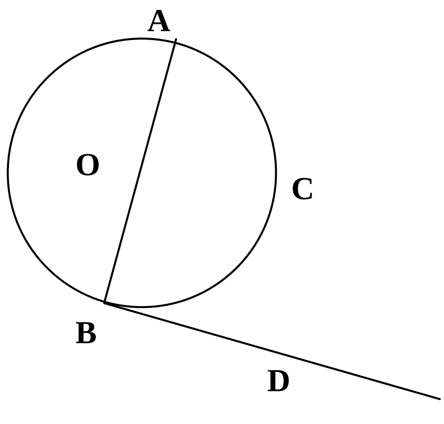
Una delle prime definizioni di angolo giunte a noi dall'antichità è quella che dà Euclide (attivo nel ¯III sec.) nel I libro degli *Elementi*; prima di riportarla qui, notiamo che essa fa parte dell'elenco che Euclide denomina *oroi* (al singolare *oros*), cioè "termini" e non "definizioni";[1] i numeri romani che seguiranno sono quelli degli oroi cui corrispondono:[2]
oros VIII: Angolo piano è l'inclinazione reciproca di due linee su un piano, le quali si incontrino tra loro e non giacciano in linea retta;
oros IX: Quando le linee che comprendono l'angolo sono segmenti prolungabili l'angolo si chiama rettilineo;
oros X: Angoli retti sono quegli angoli (rettilinei) che sono uguali quando sono formati da un segmento e da un altro innalzato su quello:



Questa ultima descrizione, che agli occhi moderni potrebbe apparire bizzarra, rende necessario un apposito postulato, il IV: «Tutti gli angoli retti sono uguali tra loro».
Si noti come, ai tempi di Euclide, il termine "angolo" venisse considerato in modo più ampio di quanto non lo sia oggi, dato che

[1] La critica moderna tende oggi a ritenere che l'Autore intendesse non tanto *definire* tali termini, ma piuttosto *evocarli*, o semplicemente *descriverli*. Il più famoso e discusso nei secoli è il I: «Punto è ciò che non ha parti»; è ovvio che non può trattarsi di una "definizione" di punto. In termini moderni, la questione è oggi risolta con l'introduzione dell'idea di "termini primitivi", tra i quali: punto, linea, retta, superficie etc. Nelle trattazioni scientifiche moderne si evita di tentare di dare definizioni di tali termini, mentre nei testi scolastici ci si ostina a farlo, ovviamente con risultati discutibili.
[2] Facciamo riferimento alla traduzione di Attilio Frajese (Euclide, 1970). Va detto che questo traduttore opta per "retta" laddove Euclide usa "segmento prolungabile"; nei limiti del possibile, restituiremo ad Euclide la forma originale, tradendo la traduzione dove ci apparirà necessario. Euclide non usa il termine "retta", per motivi filosofici, onde evitare l'infinito attuale, come aveva chiesto Aristotele, prediligendo quello potenziale; preferisce dunque la dizione "segmenti prolungabili", anche se a volte omette l'aggettivo e lo considera implicito.

venivano inclusi tra gli angoli, anche quelli formati non solo da rette.
Si noti anche, però, che vengono esclusi dalla descrizione di angoli quelli che oggi chiamiamo angolo nullo, angolo piatto, angolo giro, dato che le linee (semirette) che delimitano l'angolo non possono stare sulla stessa direzione, cosa che accade in questi tre casi.
Si noti ancora che Euclide non considera affatto, come angolo, la parte di piano compresa fra i due segmenti prolungabili con origine in comune, com'è diffuso oggi in Italia, e non solo.
Notiamo infine come non vi sia una univoca traduzione in italiano degli *Elementi*, a causa di una complicata vicenda di viaggi e traduzioni del testo originale, salvatosi per caso da un incendio, dal greco, al siriano, all'arabo, nuovamente al greco, al latino, all'italiano. Dunque, come abbiamo detto, noi useremo la traduzione di Attilio Frajese, ma con mille cautele critiche (Euclide, a cura di Attilio Frajese, 1970).
Euclide studiò in particolare alcuni angoli mistilinei, cioè angoli che hanno come "lati" una semiretta (come diremmo noi oggi) ed una curva, per esempio un arco di circonferenza; proprio questo tipo di angolo (che, nel Medioevo, verrà chiamato da Giordano Nemorario "di contingenza") viene studiato nel III libro degli *Elementi*, in particolare nel teorema XVI.
Lo illustriamo come segue, richiamando la sua proprietà fondamentale:
Sia data una circonferenza di centro O e su essa un diametro AB; da B si traccia la semiretta perpendicolare ad AB; siano C un punto della circonferenza e D un punto di tale semiretta; l'angolo mistilineo DBC è minore di qualsiasi angolo rettilineo.



Quella di Euclide è il culmine di una successione di definizioni o descrizioni che risalgono agli albori della geometria; Euclide vive nel ¯III secolo, ma l’idea di angolo si trova già testimoniata in vari Autori precedenti, per esempio in Talete (¯VII sec.) ed usata in vari teoremi che portano il suo nome.
Successivamente ad Euclide, altri matematici greci proposero diverse definizioni; riportiamo solo quelle che hanno avuto maggior seguito.

Apollonio di Perga (attivo nel ¯225): «Angolo è una contrazione di una superficie (…) in un sol punto sotto una linea spezzata (…)»; tale definizione viene ripresa anche dal grande Erone (attivo nel ¯100).

Eudemo di Pergamo (attivo nel II sec.): «Angolo è la rottura di una linea»; qui “rottura” va intesa nel senso di “cambio di direzione attesa per continuità”.

Carpo di Antiochia (II sec.): Angolo è la «la distanza delle linee (…) che lo comprendono».

Pappo (III sec.) usa una definizione come quella di Euclide, ma dimostra che il IV postulato di Euclide vale solo per gli angoli retti rettilinei e non per quelli mistilinei.

Proclo (412-486) scrive un dotto ed importantissimo *Commentario* all’opera di Euclide; in esso asserisce:
VIII: «Angolo piano è l’inclinazione di due linee che hanno un estremo in comune in un piano e che non giacciono in direzione l’una dell’altra;
Proclo commenta le scelte di Euclide e dei suoi predecessori e fa notare come la grandezza angolo non è archimedea; in modo elementare, spieghiamo questa affermazione come segue:
se abbiamo due segmenti *AB* e *CD* con $\overline{AB} < \overline{CD}$, esiste un numero naturale n tale che l’ennesimo multiplo di *AB* supera *CD*, cioè: $n\,\overline{AB} > \overline{CD}$; si dice allora che le grandezze “lunghezze dei segmenti” costituiscono una classe archimedea;
questa proprietà, apparentemente così naturale, vale per varie classi di grandezze, ma non per tutte, come per le ampiezze degli angoli; in tal caso ciò dipende dal fatto che c’è un limite di misura massima, l’angolo giro; inoltre, la presenza dell’angolo di contingenza non permette alla classe degli angoli di Euclide di essere archimedea.

Proclo fa poi una dotta e sottile classificazione degli angoli, tra i quali privilegia quelli rettilinei.
Può essere interessante conoscere la frase finale della sezione che Proclo dedica all’angolo:
«Noi affermiamo che l’angolo è il simbolo e l’immagine della coerenza nelle creazioni divine e della disposizione di unificare le cose separate e di rendere indivisibili quelle divisibili e di ridurre in una coerente unione le cose multiple».

(Per una storia assai più completa del concetto di angolo nell’antichità, si veda D’Amore, 1985; ivi si trovano anche tutte le citazioni bibliografiche che qui abbiamo volutamente omesso).

1.2 Definizione e descrizione

Occorre fare una distinzione preliminare tra definizione e descrizione.
In matematica, una descrizione è un insieme di una o più frasi tese a delineare ed evidenziare le caratteristiche di un oggetto.
Per esempio: «un quadrato è un quadrilatero che ha i quattro lati della stessa lunghezza, i quattro angoli della stessa ampiezza, i lati opposti paralleli, le diagonali della stessa lunghezza, tra loro perpendicolari e che si dividono a metà» è una descrizione.
Una definizione è una descrizione che riduce al minimo indispensabile le informazioni essendo le altre ricavabili da esse con una dimostrazione.
Per esempio: «un quadrato è un rettangolo che ha le diagonali perpendicolari» è una definizione: tutte le altre proprietà elencate sopra si possono facilmente ricavare attraverso opportune dimostrazioni.
Ciò che caratterizza le definizioni, dunque, rispetto alle descrizioni è la loro laconicità, la loro minimalità, la loro sobrietà, l’univocità.
Da un punto di vista storico, la ricerca di definizioni è sempre stata uno dei compiti più belli e più ardui del matematico; valga per tutti, l’esempio di definizione di “insieme infinito”; sue descrizioni iniziano fin dal ¯VI sec., ma una definizione vera e propria fu raggiunta solo alla fine del XIX sec. Va da sé, dunque, che, sul piano didattico, l’idea di dare definizioni deve aver luogo ragionevolmente solo alla fine del processo apprenditivo. Iniziare la trattazione scolastica di un oggetto dalla sua definizione si rivela innaturale, specie ai bassi livelli di scolarità: qui sembra più pertinente ricorrere a descrizioni piuttosto che a definizioni.

Nelle interviste che seguiranno, abbiamo spinto gli studenti a dare descrizioni degli angoli quando l'oggetto angolo non era ancora stato tema di una esplicita trattazione formale in aula; abbiamo usato la parola definizione quando tale oggetto aveva già avuto trattazioni in aula. Appare chiaro però che nessuno degli intervistati abbia colto la differenza. Appare anche che gli intervistati che avevano trattato l'oggetto "angolo" a scuola, in una prima fase dell'intervista, abbiano fatto ricorso o tentato di far ricorso alla definizione data dall'insegnante riproponendo le stesse parole, ma immediatamente dopo hanno *oggettivato* l'idea personalmente costruita proponendo varie descrizioni.

1.3 Attuali definizioni scolastiche di angolo in Italia e altrove

La definizione più ricorrente in Italia oggi tra gli studenti dei corsi di base di geometria è la seguente o sue varianti:
angolo è la parte di piano[3] compresa tra due semirette che hanno la stessa origine; l'origine comune delle due semirette è detta vertice dell'angolo, mentre le due semirette sono dette lati dell'angolo.
Inutile notare che due semirette con origine in comune determinano due angoli distinti, il che andrebbe specificato nella definizione:
angolo è ciascuna delle due parti di piano comprese tra due semirette che hanno la stessa origine.
Va anche deciso se i lati fanno parte o no dell'angolo, il che cambia parecchio il senso che hanno alcuni casi particolari:

i lati fanno parte dell'angolo	**i lati non fanno parte dell'angolo**
il vertice fa parte dell'angolo	il vertice non fa parte dell'angolo
l'angolo nullo è una semiretta	l'angolo nullo è un insieme vuoto
l'angolo piatto è un semipiano aperto	l'angolo piatto è un semipiano chiuso
l'angolo giro è il piano	l'angolo giro è il piano privato di una semiretta

In ogni caso, l'angolo è una parte (illimitata) di piano.
La definizione qui illustrata ha un'origine incerta ed appare a partire dal XVIII secolo in Europa.

---

[3] A volte appare l'aggettivo "illimitata", a volte no. È evidente che, in questa situazione, l'aggettivo "illimitata" è pleonastico dato che ci si riferisce ad una parte di piano aperta.

Una sua variante si è avuta con l'introduzione della teoria degli insiemi, durante il XX secolo:
angolo piano è l'intersezione (o l'unione) di due semipiani le cui origini sono incidenti;
nel caso dell'intersezione, si ha un angolo acuto, nel caso dell'unione si ha un angolo ottuso;
l'angolo piatto si ha come intersezione nel caso in cui le due origini sono coincidenti; l'angolo giro si ha come unione; l'angolo nullo si ha come intersezione quando le due origini sono coincidenti e si considerano come semipiani quelli opposti.

Nel periodo a cavallo tra i secoli XVIII e XIX si è sviluppato in Gran Bretagna il concetto di angolo inteso come rotazione:
siano date due semirette con l'origine in comune; si tenga fissa una delle due e si faccia ruotare l'altra, fino a sovrapporsi alla fissa; tale rotazione si chiama angolo.
Anche in questo caso, è relativamente facile sistemare la casistica relativa ad angoli nulli, retti, piatti, giro, concavi e convessi.
In questo caso, poi, la rotazione coincide spesso, sia nelle definizioni sia negli usi didattici, con la misura dell'ampiezza; per cui la sottile distinzione tra angolo e sua ampiezza, che presenta qualche complicazione nei casi precedenti, non si presenta.

Nella celeberrima opera *Gründlagen der Geometrie* che David Hilbert ha pubblicato nel 1899 (Hilbert, 1899), si ha la proposta seguente:
«Sia α un qualsiasi piano ed h, k due qualsiasi semirette distinte in α, aventi origine in uno stesso punto O, che appartengano a rette diverse. Chiamiamo *angolo* il sistema di queste due semirette h, k e lo indichiamo con $\sphericalangle (h, k)$, ovvero con $\sphericalangle (k, h)$.
Le semirette h, k si chiamano *lati* dell'angolo ed il punto O si chiama *vertice* dell'angolo».
Lo stesso Hilbert nota come da questa definizione vengano esclusi angoli piatti e concavi; ma restano esclusi anche l'angolo giro e l'angolo nullo.
Questa opera di Hilbert è stata notoriamente scritta per rimediare, all'inizio del XX secolo, alla lacunosa situazione in quanto al rigore che era stata riconosciuta nell'opera di Euclide, considerata a lungo, da molti studiosi, anche se non da tutti, esempio di perfezione.

Non si può non notare come l’idea di angolo sia, nelle varie impostazioni, nettamente differente. Per esempio, nell’opera di Euclide, l’angolo è una non meglio chiarita “inclinazione reciproca”, in quella di Hilbert un sistema che contiene due semirette e la loro origine comune, in quella anglosassone una non meglio precisata “rotazione”. Di fatto, se si volesse interpretare la figura geometrica “angolo” nell’opera di Hilbert, sembra si possa pensare che l’angolo sia formato dall’insieme dei punti delle due semirette.
Esistono molte altre definizioni elementari di angolo, per esempio in trigonometria; ma qui possiamo sorvolare.

A mo’ di elenco, rivediamo dunque le principali tipologie di definizioni che sono emerse:

1. Euclide, Pappo, Proclo: Inclinazione: «Angolo piano è l’inclinazione reciproca di due linee che in un piano hanno un estremo in comune e che non giacciono l’una in direzione dell’altra»;
2. Apollonio: Contrazione: «Angolo è una contrazione di una superficie (…) in un sol punto sotto una linea spezzata (…)»;
3. Eudemo: Cambio di direzione: «Angolo è la rottura di una linea»;
4. Carpo: Distanza tra lati: angolo è la «la distanza delle linee (…) che lo comprendono»;
5. XVIII sec.: Parte di piano compresa tra semirette: «Angolo è ciascuna delle due parti di piano comprese tra due semirette che hanno la stessa origine»;
6. XVIII – XIX sec.: Rotazione: siano date due semirette con l’origine in comune; si tenga fissa una delle due e si faccia ruotare l’altra, fino a sovrapporsi alla fissa; tale rotazione si chiama angolo;
7. XX sec.: Intersezione o unione di semipiani: «Angolo piano è l’intersezione (o l’unione) di due semipiani le cui origini sono incidenti»;
8. Hilbert: Sistema di lati e vertice: «(…) Chiamiamo *angolo* il sistema di queste due semirette h, k e lo indichiamo con $\measuredangle (h, k)$, ovvero con $\measuredangle (k, h)$ (…)».

1.4 L’angolo e la didattica

Il precedente, volutamente lacunoso, excursus tra le definizioni che la matematica ha elaborato nei millenni per il suo oggetto “angolo” ha uno scopo didattico.

Ci poniamo infatti la domanda: Quali di tali definizioni sono presenti nella cultura di un allievo di scuola dell'infanzia, di scuola primaria o secondaria di I grado?
Più esplicitamente, studiamo due casi.
Caso a: un allievo che non ha ancora avuto espliciti contatti in aula con tale oggetto, a quale di queste descrizioni-definizioni fa spontaneamente ricorso? Sono tutte presenti?
Caso b: un allievo che ha già avuto a che fare con questo oggetto matematico in aula, accetta come spontanea la definizione che è stata usata in aula? Oppure sono presenti anche le altre?
Non svolgeremo una vera e propria ricerca in queste direzioni, ma ci limiteremo a compiere delle interviste sia in situazioni di aula che fuori.
La nostra è solo un'analisi qualitativa basata su colloqui diretti individuali.

2. Formazione spontanea dei concetti in matematica

La formazione spontanea dei concetti matematici ha delle peculiarità che la ricerca ha ampiamente messo in evidenza. Riassumiamo qui i tratti specifici di queste peculiarità.
Gli individui, immersi in un mondo che propone continuamente nuove conoscenze, si trovano ad avere relazioni con gli oggetti matematici che, non essendo accessibili percettivamente, possono essere conosciuti e comunicati solamente grazie alle rappresentazioni semiotiche che l'essere umano si fa di essi e che condivide con altri, in opportune comunità (Duval, 1993; 1999).
Ma: che cosa è un oggetto matematico? In un articolo famoso che aprì la strada, anche in senso critico, a molte successive riflessioni, Chevallard (1991) definisce un oggetto matematico come «un emergente da un sistema di prassi dove sono manipolati oggetti materiali che si scompongono in differenti registri semiotici: registro orale, delle parole o delle espressioni pronunciate; registro gestuale; dominio delle iscrizioni, ovvero ciò che si scrive o si disegna (grafici, formule, calcoli,…), vale a dire, registro della scrittura». Dunque, l'oggetto matematico sarebbe il risultato di prassi su oggetti materiali; noi aggiungiamo: all'interno di una comunità che stabilisce i codici ed i registri semiotici di rappresentazione.
E: che cosa sono le rappresentazioni semiotiche? Duval (1996) afferma che «Le rappresentazioni semiotiche sono rappresentazioni la cui

produzione non è possibile senza la mobilitazione di un sistema semiotico: così le rappresentazioni semiotiche possono essere produzioni discorsive (in lingua naturale, in lingua formale) o non discorsive (figure, grafici, schemi,…). E questa produzione non risponde unicamente ad una funzione di comunicazione: può anche rispondere ad una funzione di oggettivazione (per sé stessi) o ad una funzione di trattamento».[4]
Per essere più espliciti, dobbiamo chiamare in causa:
conoscenza per fini personali (oggettivazione),
conoscenza per e da comunicare,
conoscenza per rappresentare;
ci troviamo di fronte dunque ad una tripla funzione di cui si deve tener conto nel momento in cui si mobilita un sistema semiotico per rappresentare un oggetto della matematica.
Le tre funzioni sembrano fondersi in una, se si pensa che il processo di oggettivazione è possibile solo grazie alla comunicazione (a sé stessi o ad altri) e che, in ogni caso, costruire conoscenza è compiere *tutte e tre* tali funzioni.
A questo punto, si parla spesso di "funzione di oggettivazione", intesa, nell'approccio semiotico antropologico, come trasformazione attiva degli oggetti culturali in oggetti di coscienza; seguiamo la definizione che ne dà Radford (2005): «Il termine oggettivazione è composto di due parole: *ogget+tivazione*. La prima viene da *obietare*, che significa "mettere qualcosa davanti a qualcuno". *Facere* significa "fare", di modo che, etimologicamente oggettivazione significa "far mettere qualche cosa davanti a qualcuno in modo che lo possa percepire". Nel nostro contesto, oggettivazione indica un processo che ha per scopo di mostrare qualche cosa (un oggetto) a qualcuno. Quali sono i mezzi per mostrare l'oggetto? Sono quelli che chiamo *mezzi semiotici di oggettivazione*. Sono oggetti, artefatti, termini linguistici, in generale segni che si utilizzano per rendere visibile un'intenzione e per condurre a termine un'azione».
Quindi la funzione di oggettivazione esce dal mero uso personale, privato, ed abbraccia la volontà di mostrare qualche cosa a qualcuno,

[4] Interessanti analisi tra la posizione che considera pre-esistente l'oggetto matematico e quella che lo considera come emergente da un sistema di prassi, si trovano in due lavori di Bagni (2006: cap. XXIII, pagg. 237-244; 2007: cap. VI, pagg. 129-140).

presupponendo quindi una volontà comunicativa. Oggettivare comporta comunicare e dunque include anche una capacità di trasformazione della rappresentazione semiotica (di trattamento, se non si cambia il registro; di conversione, in caso contrario). Nella prassi comunicativa, se la trasformazione non porta ai risultati sperati, chi sta oggettivando, "mostrando", "facendo apparire" con la volontà di farlo, convertirà la rappresentazione in un'altra nuova.

In base a questa necessità comunicativa, chiunque si trovi in una situazione di insegnamento/apprendimento della matematica, dalla parte dell'insegnare, deve necessariamente entrare e far entrare i propri allievi in un *processo di oggettivazione*, dunque sceglie quali, fra le rappresentazioni possibili di un dato oggetto matematico, proporre a chi si trova dalla parte dell'apprendere.

Tale scelta dovrebbe basarsi su quelle rappresentazioni semiotiche che il soggetto in fase di apprendimento è già in grado di riconoscere, di manipolare e di gestire. Nel prendere in esame i vari oggetti della matematica che fanno parte di quel che vogliamo che gli allievi costruiscano, non possiamo credere che chi si trova in fase di apprendimento sia privo di idee al riguardo: «Se si pronuncia il nome di un oggetto a qualcuno al quale tale oggetto è ignoto, non si deve credere che costui non sia in grado di farsi un'immagine di quell'oggetto. Egli si fa, in modo confuso, oppure completo, o solo parziale, in base alle proprie conoscenze ed esperienze, un'immagine che può essere figurale, oppure un suono, una parola,…» (Fandiño Pinilla, D'Amore, 2006) perché «per sua natura, l'essere umano si forma spontaneamente immagini (mentali) di ciò con cui entra in contatto in forma sensibile (vista, udito, tatto,…)».

Quindi, per poter selezionare le rappresentazioni da proporre agli allievi, per poter scegliere, cioè, i mezzi semiotici di oggettivazione, sembra necessario conoscere preventivamente quali sono le rappresentazioni semiotiche di cui gli allievi si possono servire spontaneamente (D'Amore, 1998) per comunicare le proprie idee relativamente ad un oggetto della matematica.

Occorre però tenere fermamente presente il seguente fatto. È il contesto d'uso che prende il sopravvento e determina le concezioni e le convinzioni, dunque anche le concettualizzazioni, e la formazione dei concetti in matematica. Anche se nel suo esempio Sbaragli (2003) fa l'esempio dell'oggetto matematico "punto", esaminato in una direzione simile, le sue conclusioni sono di fatto le stesse nostre: «È in effetti l’“uso” che condiziona la significatività e quindi il valore di un dato contenuto che, in questo caso, coinvolgerà il termine punto in diversi àmbiti».

Molte delle risposte fornite dagli intervistati, e delle quali vedremo solo qualche esempio, sono proprio il risultato del contesto d’uso, come apparirà in modo del tutto evidente.

Prosegue Sbaragli (2003): «Come riferisce D’Amore (2003), risulta impossibile all’interno di questa teoria ogni osservazione scientifica in quanto l’unica analisi possibile è “personale” o soggettiva, comunque circostanziata e non generalizzabile. Non si può quindi far altro che esaminare i diversi “usi”: l’insieme degli “usi” determina infatti il significato degli oggetti. (D’Amore, 1999a)».

Non possiamo, quindi, fare a meno di conoscere i vari contesti d’uso riferiti alla parola “angolo”.

Nel momento in cui si parla di “angolo” a soggetti di età compresa fra i quattro-cinque e gli otto anni sembra che il significato che immediatamente loro attribuiscono al termine detto sia in linea con il significato che gli veniva attribuito dagli Greci e dai Latini e che, ancora oggi si usa in Italia.

Consultando un buon vocabolario di latino troviamo alcuni significati diversi da attribuire alla parola angolo; fra questi ci sono quelli che comunemente, in lingua italiana, ancora oggi gli vengono dati.

Alla voce *Angŭlo, as, āre (tr)* troviamo, come traduzione, i termini “piegare”, “avvolgere” che denotano azioni ben precise, le stesse a cui ci si riferisce in greco antico alla voce *ank* (da cui ανκύλος, *ankýlos, angolo*) “piegare”, “curvare”.

Scorrendo di qualche riga si trova *Angŭlus, i* che viene tradotto semplicemente con il termine “angolo”. Di questo si danno significati diversi citando modi di dire di centinaia di anni fa:

Nec ullo in angulo Italiae: in nessun angolo d’Italia (Cicerone);

Ille mihi angulus ridet: quel cantuccio mi piace;

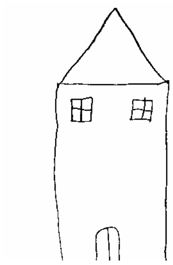
In angulo iacere: stare nell’angolo.

Viene anche dichiarato che può essere tradotto con (veniva inteso come) “luogo chiuso”, “aula di scuola”, “ripostiglio”.

Né manca *Ad pares angulos*: ad angoli retti.

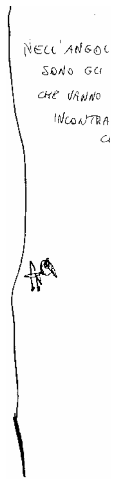
Questi modi di dire sono arrivati fino a noi; infatti, consultando ora un buon vocabolario di italiano, possiamo trovare usi diversi che

comunemente si attribuiscono alla parola angolo: l'angolo di una stanza, sedere in un angolo, un tavolo d'angolo, all'angolo della strada, via Verdi angolo via Bianchi, angolo di cottura… potremmo elencarne parecchi senza neppure considerare quelli legati alla matematica.
È quindi ragionevole, supporre che anche i bambini, in Italia, riferendosi ad angolo possono pensare al cantuccio, o al posto dove riporre le scope,…
A conferma di questo riportiamo alcuni stralci di interviste fatte a bambini di scuola dell'infanzia.
- Io in televisione ho visto una casa che si chiama "l'angolo delle chiacchiere";

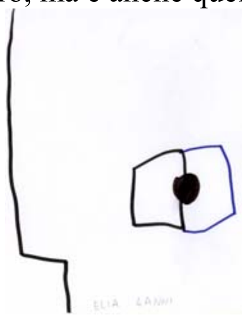


- L'angolo è quello dove ti fa stare la maestra dell'asilo quando non sei tanto bravo;
- Quando una bambina corre all'angolo delle bambole;

- Nell'angolo ci sono gli uccellini che vanno via e si incontrano per conoscersi;



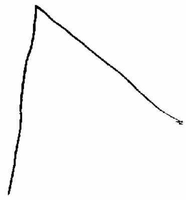
- L’angolo è quello del muro, ma è anche quello del tavolo.



Dall’analisi delle risposte date da bambini di quattro-cinque anni è possibile dedurre che le espressioni della lingua familiare possono creare immagini che facilmente si traducono in rappresentazioni non solo nel registro della parola, ma anche in quello dei segni; se ad esempio, un individuo si crea un’immagine dell’angolo riferita al cantuccio sicuro, traduce questa immagine nel registro dei segni con un qualcosa di limitato, di chiuso, di finito di “avvolgente”; se, invece sta a significare un posto scomodo, dove per qualche motivo non si vuol stare, nella traduzione nel registro scritto viene proposto qualche cosa di “pungente”, qualche cosa che “ha una punta”.

- È a punta come il tetto;

- È la punta del triangolo



Per poter avere la possibilità di verificare se realmente le immagini che vengono costruite, grazie alle sollecitazioni date dai vari contesti d'uso della parola angolo, possono tradursi in rappresentazioni personali fatte nel registro dei gesti o nel registro dei segni, durante le interviste, a volte, è stato fatto esplicito invito ai bambini ad utilizzare registri diversi da quello delle parole.
Diverse sono state le risposte degli allievi a proposito di "angolo".
La domanda «Che cos'è l'angolo in matematica?» è stata letta o è stata ascoltata (nel caso dei bambini di scuola dell'infanzia non ancora in grado di leggere) ed è stata interpretata in due modi diversi:

- non è stato preso in considerazione l'àmbito al quale ci si riferiva; la parte finale della frase in cui veniva richiesto "in matematica" è stata trascurata;
- non è stato consapevolmente preso in considerazione l'àmbito al quale ci si riveriva; la parte finale della frase in cui veniva richiesto "in matematica" è stata trascurata, ma la condivisione di metapratiche dello studente (D'Amore, 2005) ha portato gli allievi a dare la risposta riferita a ciò che comunemente si intende per "angolo in matematica"; questi allievi, infatti, nel momento in cui è stata posta la domanda (nell'ora di matematica e con l'insegnante di matematica), rispondono alla domanda «Che cos'è l'angolo in matematica?» nello stesso modo in cui rispondono alla domanda «Che cos'è l'angolo?» senza alcun richiamo alla matematica. Tale comportamento permette di rilevare una duplice situazione caratterizzata da metapratiche:
    - quella dello studente che risponde per «far supporre a chi deve valutare abilità di fatto non possedute» (D'Amore, 2005) e per soddisfare le aspettative dell'insegnante;
    - quella dell'insegnante che le accetta considerandole positive perché appagato dalla loro apparente validità, perché sono

quelle che si aspetta di sentire, perché sono quelle che la società stabilisce come pratiche.

L’intervista fatta ad A. è una ulteriore dimostrazione.

A. è un bambino che frequenta la prima primaria, intervistato nel mese di maggio, dunque a fine anno scolastico; l’intervistatore gli pone la domanda «Che cos’è l’angolo in matematica?»; ecco uno stralcio dell’intervista:

A.: Sì, lo so cos’è l’angolo. È quello lì [indica due pareti dell’aula nello spazio in cui contribuiscono a formare un angoloide].

I.: Sai dire se ci sono altri angoli da qualche parte?

A.: No. È quello l’angolo.

Quello cui si riferisce A. è quell’oggetto a cui comunemente ci si riferisce, nel linguaggio comune, in Italia, quando si pensa all’angolo: l’angoloide retto formato da due pareti consecutive. A. sceglie dunque fra i tanti significati che è possibile attribuire al termine angolo ciò che comunemente, in Italia, gli si attribuisce.

La sua oggettivazione, però, non risponde ancora alla domanda posta: “angolo in matematica”, perché:

- forse lui non sa cosa significa questo termine nell’àmbito detto,
- non prende in considerazione l’àmbito al quale ci si riferisce: lui ha un’immagine dell’angolo e la veicola in tutti i possibili àmbiti di riferimento.

L’intervista continua.

I.: Mi sai spiegare in modo diverso?

A.: È quello dove ti faceva stare la maestra quando non fai tanto il bravo.

La domanda posta ad A. ha lo scopo di mobilitare la funzione di trattamento e la risposta data dimostra che la mobilitazione è avvenuta: A. tenta di mostrare l’oggetto che ha in mente utilizzando ancora il registro orale trasformando la rappresentazione.

I.: Com’è fatto?

A.: Così [indica con un dito una parte della stanza], basta che lo guardi.

I.: Puoi dirmelo non con le parole?

A.: E come faccio?

I.: Con le mani, ad esempio.

Ora la richiesta, implicita nella domanda, non è solo di trattare l’oggetto, ma di convertirlo utilizzando un altro registro: si tenta di spingere A. a rappresentare l’oggetto attraverso il registro gestuale.

A.: Sì, lo posso fare. Ecco, questo è un angolo. Anzi questi sono tre.

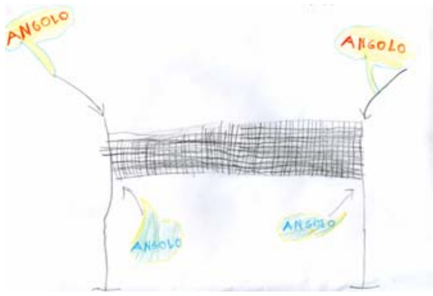
I.: Non riesco a capire. Quali sono?
A.: Tutti e tre non ce la faccio a dirteli. Te ne dico uno. L’angolo è così.

A.: Vedi, è questo l’angolo.

A.: Te lo posso far vedere anche quando gli angoli sono tre. Questo è uno.

I.: Lo sapresti dire anche con un disegno?
Di nuovo la richiesta di passare ad un altro registro semiotico.

A.: Oddio! E adesso come faccio? Sulla carta come glielo faccio capire a questa qui?
Dopo pochi istanti.
A.: Ah! Sì! Lo so come posso fare. Ecco, ho disegnato la lavagna. Lì ce ne sono quattro di angoli.



L’immagine che A. si è costruito dell’angolo non è solo riferita alla parola angolo in contesti diversi. Lui ha un’idea del significato comunemente dato alla parola angolo in lingua, ma la rappresentazione spontanea (secondo tipo) che emerge è vicina a quella scelta dalla comunità di pratiche (società) per rappresentare l’angolo in matematica.
In base alle successive sollecitazioni e alle proprie conoscenze, A. ha rappresentato l’oggetto ampliando contemporaneamente l’immagine che dell’angolo aveva già, senza che qualcuno abbia dato a lui suggerimenti di nessun tipo a conferma di quanto affermato da Fandiño Pinilla, D’Amore (2006) e riportato all’inizio: «Se si pronuncia il nome di un oggetto a qualcuno al quale tale oggetto è ignoto, non si deve credere che costui non sia in grado di farsi un’immagine di quell’oggetto. Egli si fa, in modo confuso, oppure completo, o solo parziale, in base alle proprie conoscenze ed esperienze, un’immagine che può essere figurale, oppure un suono, una parola,…» perché (continuando a citare Fandiño Pinilla, D’Amore, 2006) «Per sua natura, l’essere umano si forma spontaneamente immagini (mentali) di ciò con cui entra in contatto in forma sensibile (vista, udito, tatto,…)»
Ovviamente, in un Paese multietnico non possiamo non riflettere sui vari usi che si fa della parola angolo in lingue diverse da quella italiana.
Nel corso di una intervista fatta a bambini di prima primaria l’intervistatore pone la domanda già riportata in precedenza a S.
La bambina afferma di saperlo, ma continua a ribadire che non lo sa dire. L’intervistatore pone di nuovo la domanda senza specificare

l'àmbito di riferimento e chiede se abbia mai sentito la parola angolo detta da qualcuno. La bambina afferma di averla sentita, ma di non saperlo dire. Nessun esempio, nessun riferimento ad angoli in contesti vari come ci si poteva aspettare, nulla.
S. sembra imbarazzata perché non è in grado di fare esempi e R. (la sorella maggiore), come per giustificarla, spiega che loro, Macedoni, hanno l'abitudine di parlare italiano solamente a scuola e nei momenti di gioco con compagni, mentre parlano la loro lingua madre quando sono a casa; lingua madre che, come sottolinea sempre R., non è il macedone, ma il dialetto del loro villaggio.
R. continua dicendo: «Nella nostra lingua esiste la parola angolo, che si dice *qosh*, ma lì dove vivono i miei nonni, non si usa come qui per dire, ad esempio l'angolo delle scope. Certo, se vai lì e lo dici ti capiscono, ma di solito dicono *uoda e nietllave*, che è lo stanzino delle scope. Anche l'angolo delle bambole, lì non si dice; è il posto dove stanno le bambole. Però lo sanno che cos'è l'angolo».
Lo stesso uso dei termini, a proposito di angolo, si trova, ad esempio, in lingua spagnola. La parola "angolo", se usata in àmbito matematico viene tradotta con *ángulo*, ma se ci si riferisce ad angolo in altri contesti si utilizzano termini diversi. Questi possono essere, ad esempio: *esquima*, *cantón*, *rincón*,…; per cui la frase *il caffè dell'angolo* che comunemente viene usata in lingua italiana, in spagnolo diventa *el café de la esquina*; la frase *starsene in un angolo*, in lingua spagnola diventa *quedarse en un rincón*, per cui le parole di senso comune della lingua informale usate per significare angolo in contesti diversi da quello matematico non entrano in conflitto con le parole della matematica.
Lo stesso in lingua inglese. La parola angolo che, se riferita all'àmbito matematico, è *angle*, in lingua colloquiale si trasforma in *corner*. Si hanno, quindi, espressioni come *casa d'angolo*, *corner house*; *girare l'angolo*, *to go round the corner*; *mettere un bambino nell'angolo, top ut a child in the corner*; *calcio d'angolo* (che, come vedremo viene proposto come angolo da molti bambini italiani appassionati di calcio, con la sua immagine ben definita di piccolo spazio del campo da gioco delimitato da un archetto dove si posiziona il pallone prima di dargli un calcio), *corner kick*,…
In francese la parola angolo, se riferita alla matematica o allo sport, è *angle*, ma se riferita al cantuccio, o all'angolo della via è *coin* (*au coin de la rue*), se riferita alla piega che si può formare in una pagina del libro

o del quaderno è *corner*.

Ovviamente, dal punto di vista del successo apprenditivo, gli oggetti costruiti sui contesti d’uso sono “personali” mentre nella visione pragmatista, basata su quella antropologica, si deve giungere ad una visione istituzionale: «Riteniamo invece didatticamente importante seguire un approccio pragmatico, con una costante mediazione da parte dell’insegnante per far sì che gli oggetti matematici ed il significato di tali oggetti non rimangano solo “personali” ma diventino “istituzionali” (Chevallard, 1992; D’Amore 2001a, 2003; Godino e Batanero, 1994)» (come ben riassume Sbaragli, 2003).
Stiamo evidenziando una sorta di complessa interazione tra la concettualizzazione dovuta al contesto d’uso, l’azione didattica, la costruzione concettuale; in essa entra con decisa importanza anche la nominalizzazione che, in modo importante, investe tutti e tre gli aspetti, in particolare la dualità: nominalizzazione d’uso cioè del vissuto quotidiano, nominalizzazione proposta in àmbito scolastico.
A noi sembra ovvio, e comunque riscontrabile dalle seguenti interviste, che vi sia una forte permanenza, non solo in senso spontaneo, della concettualizzazione/nominalizzazione che fa riferimento ai contesti d’uso.

Ci serviremo più avanti dell’idea di rappresentazione spontanea. A questo proposito dobbiamo fare una distinzione.
Quando si parla di “rappresentazioni spontanee” si possono intendere due tipologie:

- rappresentazioni spontanee del primo tipo: sono quelle rappresentazioni che l’allievo sceglie fra tutte quelle che vengono proposte da altri (dagli insegnanti) e condivise in una classe[5] intesa come *comunità di pratiche* (Godino, Batanero, 1994; Radford, 1997; D’Amore, 2005);
- rappresentazioni spontanee del secondo tipo: sono quelle rappresentazioni che l’allievo propone come sue proprie rappresentazioni dell’oggetto; tali rappresentazioni possono aver

[5] Il fatto che si parli di “allievo” e di “classe” conduce automaticamente dentro i vincoli contrattuali che si possono stabilire in classe nel momento in cui i tre protagonisti dell’azione didattica (allievo – sapere - insegnante) entrano in contatto fra loro (Brousseau, 1986; D’Amore, 1999). Di questo fatto bisogna tener conto.

origine scolastica (rielaborazione personale di idee emerse in aula, per esempio in situazioni ludiche o non didattiche o didattiche; oppure da contesti privati extrascolastici, di vita quotidiana). Esse dovrebbero essere intese come rappresentazioni scelte non sulla base della volontà di soddisfare le richieste dell'insegnante che spingono l'allievo a basarsi su quanto stabilito all'interno della classe (comunità di pratiche) nel corso di rappresentazioni di un oggetto specifico, né sulla base di una libera scelta (in questo caso si ipotizza l'assenza di *metapratiche* dell'allievo; D'Amore, 2005) effettuata su una vasta gamma di rappresentazioni proposte sempre dall'insegnante in classe. Le rappresentazioni di questo secondo tipo sono quelle dettate dalla volontà di comunicare all'esterno modelli interni dell'oggetto in questione che lo studente possiede già al momento della loro evocazione in aula, da parte dell'insegnante. Gli allievi, in questo caso, non conoscono le rappresentazioni condivise dalla comunità di pratiche (intesa in senso generale: la società, non solo la classe) e non possono riferirsi a rappresentazioni proposte dall'insegnante (quindi alla classe intesa come micro-società che condivide prassi; tuttavia essi possono fare, e naturalmente fanno, riferimento alle esperienze esterne, di vita vissuta quotidiana). Gli allievi avvertono allora la necessità di comunicare all'esterno il modello interno che si sono costruiti spontaneamente a proposito dell'oggetto matematico di riferimento. Ci stiamo riferendo a modelli ingenui che vengono portati o che vorrebbero venir portati all'esterno per necessità o volontà comunicative.

A proposito delle prime, possiamo rifarci a mo' di esempio ad un lavoro di D'Amore (1998); in tale lavoro, l'autore presenta a studenti di vari livelli scolastici quattro diverse rappresentazioni semiotiche di una stessa relazione binaria e analizza se, in che percentuale e come gli studenti riconoscono l'univocità della relazione. Gli studenti intervistati avevano avuto contatti, a scuola, con le rappresentazioni proposte, anche se talvolta in modo fugace; essi, in buona percentuale, riconoscono l'identità della relazione rappresentata, ma poi "scelgono" tra le quattro quella che a ciascuno sembra la più idonea; dunque, spontaneamente, pur riconoscendo l'identità, esprimono una preferenza dovuta a scelte che non hanno a che fare con l'obiettività della situazione semiotica. Dunque, un grado di spontaneità nella scelta semiotica appare sempre,

anche al di là della identità di significato riconosciuto.
Continuando a seguire Radford (2005), occorre ancora evidenziare che, dal punto di vista dell’approccio semiotico antropologico, c’è un’importante distinzione da fare tra apprendimento e produzione di sapere:[6] «Mentre la produzione di nuovi saperi risulta da attività in comune, riflessive, mediate che sfociano nella creazione di concetti culturali (oggetti matematici, …) l’apprendimento scolastico è il processo di trasformazione attiva degli oggetti culturali in oggetti di coscienza. (…) nel caso degli oggetti concettuali, il percepito è di fatto non percepibile, nel senso che è accessibile solo indirettamente, attraverso *mezzi semiotici di oggettivazione*».
Se ci mettiamo in situazioni idonee, dunque, si potrebbe verificare quali siano i mezzi semiotici di oggettivazione che giovani allievi mettono in atto per accedere agli oggetti matematici, sia in situazioni nelle quali ancora non vi sono stati contatti istituzionali con tali oggetti, sia nel caso contrario, per verificare come tutto ciò avviene, che cosa significa “spontanee”, se le rappresentazioni spontanee sono idonee e se persistono e come, anche dopo le istituzionalizzazioni scolastiche.

3. Esempi di conversazioni-interviste

Vi sono dunque da studiare 16 situazioni, 2 casi per 8 definizioni, cosa che faremo nei seguenti paragrafi. Riporteremo per ciascuna situazione solo un breve stralcio dell’intervista.[7]
I. sta per “intervistatore”; l’allievo intervistato è indicato con l’iniziale del nome.
La domanda è sempre la stessa: Se ti dico la parola angolo, che cosa ti viene in mente?
Dobbiamo notare subito come la formulazione di questa domanda lascia aperta la porta a risposte tratte da contesti d’uso, assolutamente extra scolastici, il che era, ovviamente, nelle intenzioni stesse dell’intervista, come abbiamo più volte detto.

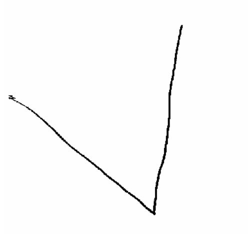
---

[6] Radford richiama, a questo proposito, la trasposizione del sapere proposta da Chevallard (1985) esortando a non dimenticare di distinguere i meccanismi di acquisizione del sapere con quelli della sua costruzione.
[7] Le interviste complete sono depositate presso gli autori, a disposizione degli studiosi che volessero approfondire.

Esempio di intervista che rivela il modello 1 nel caso a

Soggetto intervistato: C., età: 5 anni, classe frequentata: III anno della scuola dell'infanzia.

C.: L'angolo è questo [e rappresenta graficamente quello che ha in mente].



I.: Che cosa è l'angolo?

C.: Da qui [indica il vertice dell'angolo con un dito] ci sono i due segni che ho fatto con la matita e quello è l'angolo.

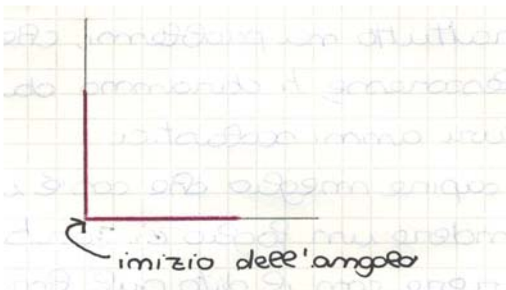
I.: Il punto che hai indicato a quale linea appartiene?

C.: A tutte e due. È da lì che inizia l'angolo e poi va avanti con le linee della matita.

Esempio di intervista che rivela il modello 1 nel caso b

Soggetto intervistato: S., età: 12 anni, classe frequentata: II media.

S.: Tutte le figure geometriche hanno un angolo. L'angolo comincia quando le due linee si attaccano e continua. Non esiste nulla che lo fermi.



Esempio di intervista che rivela il modello 2 nel caso a

Soggetto intervistato: A., età: 8 anni e mezzo; classe frequentata: III primaria.

A.: Non saprei come dirlo. Non so… Ce l'ho in mente, ma non lo so dire.

I.: Vuoi provare a disegnarlo?

A.: Sì [e disegna una spezzata].

I.: Quello che hai disegnato è un angolo?
A.: Sì. Ma non devi guardare tutto. L’angolo è questo punto qui sotto.

Esempio di intervista che rivela il modello 2 nel caso b
Soggetto intervistato: L., età: 12 anni, classe frequentata: I media.
L.: Non è così facile da dire.
I.: Perché?
L.: Adesso non mi ricordo proprio bene cosa devo dire. Aspetta… No, non me lo ricordo come aveva detto la professoressa.
I.: Dimmi cosa è per te l’angolo.
L.: E se dopo non va bene?
I.: Non ti preoccupare, qualsiasi cosa mi dici va bene.
L.: Allora te lo dico. Io me lo immagino come due linee e l’angolo è un punto dove si incontrano.
I.: Lo puoi disegnare?
L. disegna una spezzata e evidenzia il punto che per lui rappresenta l’angolo.

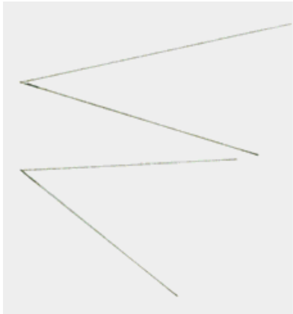
Esempio di intervista che rivela il modello 3 nel caso a
Soggetto intervistato: F., età: 7 anni, classe frequentata: II primaria.
F.: Quando stai a giocare a pallone tu puoi far fare un angolo alla palla perché dai un calcio e la mandi in alto, ma dopo, a un certo punto, la palla cambia direzione e torna giù. Dove va a finire quando torna giù dipende da come dai il calcio, perché può fare un angolo più stretto e

allora ti cade vicino o un angolo più largo e allora ti cade più lontano.
Si noti il formidabile riferimento ad un contesto d'uso che per F. è pregnante.

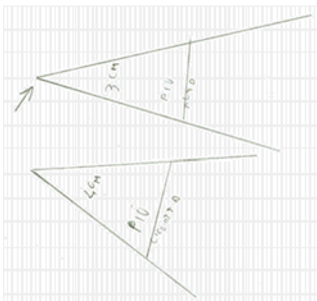
Ulteriore esempio di intervista che rivela il modello 3 nel caso a
Soggetto intervistato: E., età: 8 anni, classe frequentata: III primaria.
E.: Quando gioco a palla con le mie amiche. Facciamo così. Ci mettiamo un po' lontane e io, e poi quell'altre a turno, ci lanciamo la palla, ma non ce la lanciamo al volo, la facciamo sbattere per terra.
I.: Come, mi spieghi?
E.: Io, per esempio, prendo la palla e la faccio sbattere forte per terra. La palla sbatte e cambia verso e va da te o da qualcun altro che sta dall'altra parte e la prende.
I.: E tu sei brava in questo gioco?
E.: Sì, un po' sì. Quando ci sto attenta a quanto la devo sbattere forte per terra e dove, allora riesco a mandarla addosso a chi la prende.
I.: E l'angolo cosa c'entra?
E.: Perché quando sbatte per terra e cambia verso è come se gira l'angolo. A te non te l'hanno detto mai di stare attenta quando giri l'angolo?

Esempio di intervista che rivela il modello 3 nel caso b
Soggetto intervistato: D., età: 11 anni, classe frequentata: V primaria.
D.: Può essere diverse cose, per esempio quando giri l'angolo. Tu cammini e vai dritto, a un certo punto cambi idea e vuoi andare a destra, o a sinistra, allora interrompi la traiettoria che stavi facendo, giri l'angolo e fai un'altra traiettoria.

Esempio di intervista che rivela il modello 4 nel caso a
Soggetto intervistato: G., età: 8 anni, classe frequentata: III primaria.
G. dimostra di possedere i modelli 1 e 2 che si fondono senza alcuna contraddizione.
L'intervista prosegue e I. rappresenta due angoli sul foglio già usato da G.



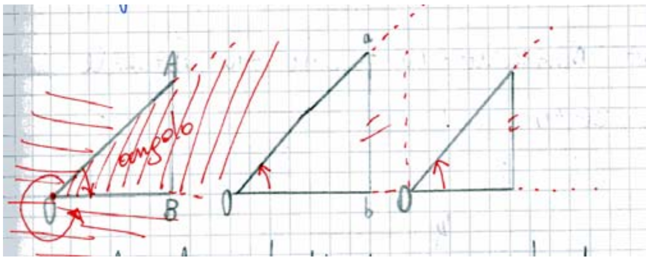
I.: Come sono questi due angoli fra di loro?
G.: Non sono uguali.
I.: Ce n'è uno più grande e uno più piccolo?
G.: No. Questo non lo potrei dire, perché uno è più cicciotto, e allora se guardiamo questo è più grande lui, ma l'altro è più alto e se guardiamo questo è più grande lui.
I.: Guardiamo l'ampiezza.
G.: A occhio mi sembra più "cicciotto" questo, ma per essere sicuro lo dovrei misurare.
I.: Puoi misurare, puoi fare ciò che ritieni necessario.
G.: Posso prendere il righello?
I.: Certo! A cosa ti serve?
G.: A misurare quale angolo è più grande.
I.: Come fai?
G.: Con la distanza delle linee che hai disegnato. Uno è 3 centimetri perché la distanza è così, l'ho visto sul righello. L'altro è 4 centimetri: anche qui ho visto la distanza sul righello, allora è più grande quello di 4 centimetri.



Esempio di intervista che rivela il modello 4 nel caso b
Soggetto intervistato: D., età: 11 anni, classe frequentata: V elementare.
I. disegna due angoli come nel caso a e chiede come sono i due angoli fra loro. D. afferma che ce n'è uno più grande e uno più piccolo.
I.: Come fai ad esserne sicuro?
D.: Si vede a occhio, ma potrei misurarli, solo che qui non ho il goniometro.
I.: Potresti fare in un altro modo?
D.: Sì. Taglio il foglio di carta e li metto uno sopra l'altro, poi faccio coincidere un lato dell'angolo più piccolo con un lato dell'angolo più grande.
I.: E così cosa dimostri?
D.: Vedi? Se tu prendi un righello e metti zero su un punto del lato dell'angolo e poi misuri quanto sta distante il punto sopra dell'altro lato dell'angolo e fai la stessa cosa con l'altro angolo, vedi che un angolo è più piccolo perché misura meno.

Ulteriore esempio di intervista che rivela il modello 4 nel caso b
Soggetto intervistato: L., età: 12 anni, classe frequentata: I media.
I. disegna due angoli come nel caso a e chiede come sono i due angoli fra loro. L. afferma che ce n'è uno più grande e uno più piccolo.
I.: Come puoi essere sicuro del fatto che questo è davvero più grande?
L.: Bisognerebbe misurarli.
I.: Misurali.
L.: Non posso, qui non c'è un goniometro.
I.: Potresti trovare un altro strumento o un sistema diverso per misurali.
L.: No.
I.: Sei sicuro?
L.: La professoressa ha detto che ci vuole il goniometro.
I.: Non pensare alla professoressa. Tu come faresti?
L.: Io potrei prendere il righello, ma la professoressa mi ha cancellato tutto con la penna rossa.
I.: Che vuoi dire?
L.: Io potrei fare una linea che segna la distanza dei lati dell'angolo e poi misurare quanto è lunga.
I.: Fallo!
L. fa ciò che ha detto e dichiara che l'angolo più grande è quello che ha la distanza maggiore fra i due lati.

I.: Ah, bene.
L.: Sei sicura? La professoressa mi ha cancellato tutto.
I.: Vuoi raccontarmi che cosa ti ha cancellato la professoressa?
L.: Te lo faccio vedere.
Mostra il suo quaderno.

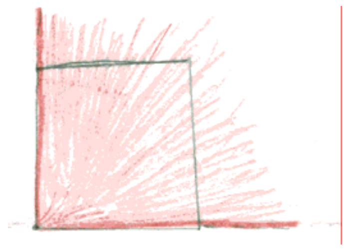


L.: Vedi, io volevo dire la stessa cosa, ma la professoressa mi ha cancellato tutto con il rosso e mi ha detto che l’angolo è quella parte che non finisce mai.

Esempio di intervista che rivela il modello 5 nel caso a
Soggetto intervistato: B., età: 5 anni, classe frequentata: III anno della scuola dell’infanzia.
B.: Sì. Quando vado con mio nonno, lui me lo dice sempre. Mi ha detto che l’angolo è… come l’angolo della casa. Te lo faccio vedere [prende un foglio e disegna].

B.: Ecco, qui dove ho segnato con la crocetta ci sono gli angoli.
I.: Mi fai capire meglio?
B.: Adesso te ne dico due. È qui dove coloro. È tutto questo spazio qui [colora muovendo il pennarello in modo concentrico; dopo pochissimo tempo smette]. Solo che adesso mi sono stancato e non coloro più. Se non fossi stanco avrei potuto colorare ancora e ancora, anche fuori della casa.

Esempio di intervista che rivela il modello 5 nel caso b
Soggetto intervistato: R., età: 11 anni, classe frequentata: V primaria.
R.: L'angolo è quella parte di spazio compresa fra due semirette che hanno il vertice in comune [poi produce un disegno].



Esempio di intervista che rivela il modello 6 nel caso a
Soggetto intervistato: O., età: 6 anni; classe frequentata: I scuola primaria.
O.: Il calcio d'angolo, quello del pallone [O. è un tifoso della Juventus].
I.: Non conosco il gioco del pallone; che cosa significa calcio d'angolo?
O.: Quando tu stai in un campo da calcio, vedi un punto vicino alla porta… ma non tanto vicino, un po' più in là. Lì, in quel punto c'è il calcio d'angolo, allora tu puoi tirare il pallone.
I.: Ma dove lo tiro?

O.: Dentro la porta da lì non ce la fai, allora devi controllare bene dove sono i tuoi compagni perché da quel punto c’è uno spazio dove puoi tirare.
I.: Com’è questo spazio?
O.: Guarda ti faccio vedere [Allunga il braccio destro di fianco a sé, poi continua la descrizione di dell’angolo].

O.: Fai finta che sono il punto da dove inizia l’angolo che puoi tirare il pallone per calcio d’angolo e il braccio è il punto dove puoi tirare, ma non è solo lì, perché lo spazio dell’angolo dove tiri è tutto questo [Sposta il braccio destro con un movimento di rotazione antioraria].

Altro esempio di intervista che rivela il modello 6 nel caso a

Soggetto intervistato: C., età: 6 anni e mezzo; classe frequentata: I scuola primaria.

C.: Se dici angolo… centro!

I.: Centro? Perché centro?

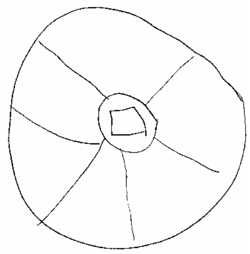
C.: Perché io gioco a pallone e c'è il centro che è un angolo.

I.: Non capisco. Mi spieghi per favore?

C.: Al centro del campo da calcio c'è un punto. Se tu ti metti lì e puoi tirare il pallone, c'è tutto lo spazio di un angolo dove puoi tirare.

I.: E com'è?

C.: Ti posso fare un disegno?



Esempio di intervista che rivela il modello 6 nel caso b

Soggetto intervistato: P., età: 13 anni; classe frequentata: II media.

P.: Ci sono tanti tipi di angoli. Si differenziano in base alla loro ampiezza. Esistono due linee che sono consecutive. Una sta ferma e una si sposta e gira. Quando ha fatto un giro completo e torna su se stessa abbiamo un angolo giro. Puoi vederlo nell'orologio quando segna mezzogiorno.

Esempio di intervista che rivela il modello 7 nel caso a

Soggetto intervistato: M., età: 6 anni; classe frequentata: I scuola primaria

M.: Di angoli ce ne sono tanti. Anche qui dentro ce n'è qualcuno.

I.: Quali sono?

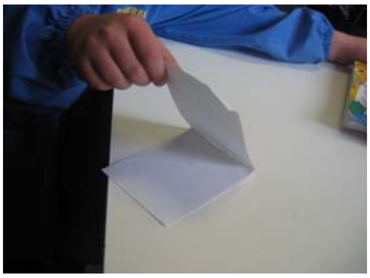
M.: Ma che non lo sai?

I.: Puoi spiegarmelo tu?

M.: Aspetta [prende due pezzetti di carta bianca di forma rettangolare che erano serviti per un gioco ed erano rimasti sopra il tavolo] Ecco è così un angolo.

M.: Aspetta, ti faccio vedere meglio. Guarda questo è un angolo.
I.: Di quello che mi hai mostrato, che cosa è l’angolo?
M.: Guarda, quando i fogli stanno così non è un angolo, perché si devono toccare insieme, invece qui un foglio va a finire sopra all’altro.

M.: Qui è un angolo perché si toccano.



I.: Ho capito come devono essere messi per formare un angolo, ma l’angolo qual è?
M.: Ce l’hai in mente un soppalco? È come nel soppalco. A casa mia ho un soppalco e lo vedo sempre l’angolo perché c’è la trave, che ce l’ha voluta mamma, e che va a toccare con una colonna piccola che l’ha voluta rivestire di legno. Lì è l’angolo.
I.: [prende i due pezzi di carta, li posiziona uno accanto all’altro e pone una domanda] Bene, allora anche questo è un angolo?

M.: No, no. Questo [toccando la carta] non è un angolo.

Per essere un angolo devono stare storti. Come ti posso dire? Devono stare inclinati. Qui si toccano bene per essere un angolo. Sì, come si toccano va bene, ma non stanno inclinati. Come fai? Se io prendo una matita e faccio una riga con la matita da tutte e due le parti non è un angolo, perché sta piatto. È un angolo se non sta piatto.

Esempio di intervista che rivela il modello 7 nel caso b

Soggetto intervistato: V., età: 14 anni; classe frequentata: III media.
V.: Quello che mi viene subito in mente è l'angolo piano.
I.: Vuoi dirmi cos'è?
V.: È diverso dall'angolo solido, nel senso che l'angolo solido è più facile perché te lo immagini meglio. È come un vertice di un cubo. Togli tutto il resto, tutte le facce che non hanno niente a che fare con quel vertice e fai finta che le facce non sono poligoni, ma qualcosa che non finisce mai. L'angolo solido è più facile. L'angolo piano dovrebbe essere la stessa cosa, ma con due rette che si intersecano.

Esempio di intervista che rivela il modello 8 nel caso a

Soggetto intervistato: S.; età: 6 anni e mezzo; classe frequentata: I scuola primaria.
S.: Non lo so dire.
I.: Non hai mai sentito la parola angolo?
S.: No. Lo so cos'è un angolo, ma non so come dirlo.
I.: Perché non provi a "mimarlo"?
S. lo fa.

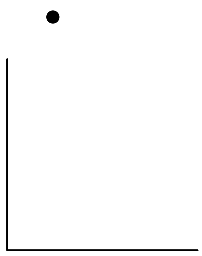
I.: Potresti anche disegnare un angolo? [L’intervistatore propone una specifica rappresentazione, in un certo qual senso imponendo una trasformazione per poter avere la possibilità di verificare (come avevamo detto all’inizio) se realmente le immagini che vengono costruite, grazie alle sollecitazioni date dai vari contesti d’uso della parola angolo, possono tradursi in rappresentazioni personali fatte nel registro dei gesti o nel registro dei segni].
S. produce un disegno.

I.: Quale dei due disegni rappresenta l’angolo?
S.: Qui [indicando il quadrato] non c’è solo un angolo e qui [indicando i due segmenti consecutivi] c’è un angolo e basta.
I.: Puoi indicare un angolo con un gesso colorato? [Come sopra, l’intervistatore invita esplicitamente la bambina ad una trasformazione].
S. prende un gesso colorato e ripassa due lati del quadrato.

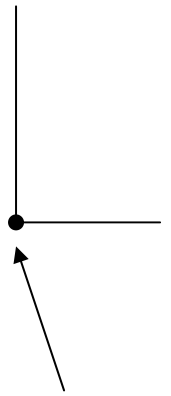
I.: [Ripete la domanda] Puoi colorare un angolo?
S.: Se quello di prima non andava bene, ne coloro un altro.
S. ripassa, con il gesso rosso, sopra altri due lati del quadrato.

S.: Ma io lo sapevo che quelli lati sono dell'angolo. È solo che non lo sapevo dire. Sono come le dita della mano, te lo avevo fatto vedere.
I.: Puoi fare un disegno di ciò che ha in mente?

I.: Ora io disegno un angolo e un punto. Secondo te il punto è dentro l'angolo?

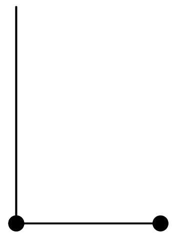


S.: No. Non è dentro l'angolo, è fuori. Te lo disegno io un punto dentro l'angolo.
[Va alla lavagna e disegna e commenta]

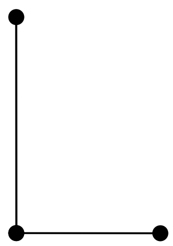


Questo è un punto dentro l’angolo

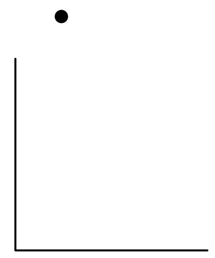
I.: Puoi disegnarne un altro?



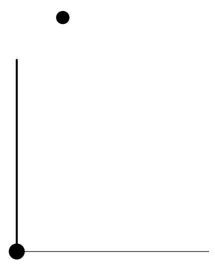
I.: E un altro ancora?



Esempio di intervista che rivela il modello 8 nel caso b
Soggetto intervistato: M., età: 10 anni, classe frequentata: V primaria.
M.: L’angolo è lo spazio tra i due lati che si incontrano in un vertice. L’angolo non finisce mai.
I.: Ora io disegno un punto e un angolo. Secondo te il punto è dentro l’angolo?

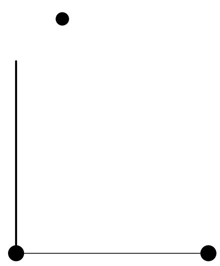


M.: No. È fuori.
I.: Disegno un altro punto. Secondo te è dentro l’angolo?



M.: Sì, quello che hai disegnato adesso è dentro l’angolo.

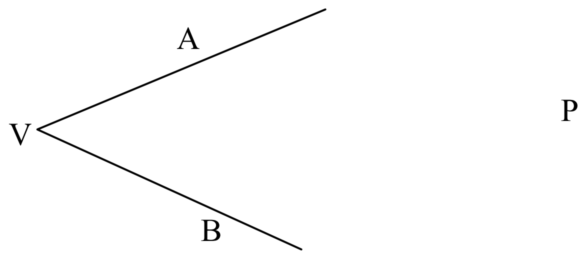
I.: E questo?



M.: Sì, anche questo è dentro. Tutti i punti del segmento sono punti dell’angolo. Anzi i punti di tutti e due i segmenti sono punti dell’angolo perché l’angolo è così [con il dito percorre i due segmenti partendo dal vertice].

4. Considerazioni finali

Dato un oggetto matematico (come l'angolo), non è detto che vi sia di esso una sola definizione; anzi, di solito ci sono varie definizioni; anche quando una di esse si impone, per diversi motivi, le altre non spariscono. Di fatto, di solito, ciascuna definizione tende a cogliere di quell'oggetto particolarità specifiche. Da un punto di vista logico, una definizione dovrebbe essere l'unità minima essenziale che si può considerare come sufficiente per inquadrare l'oggetto: esso dà una proprietà caratteristica sufficiente e le altre si ricavano con dimostrazioni opportune.
Ma la storia insegna che non sempre è così. Nel caso dell'angolo, come abbiamo visto, le diverse definizioni che la storia ci ha consegnato sono addirittura spesso essenzialmente diverse, tanto che si può ipotizzare che l'oggetto angolo è l'insieme delle caratterizzazioni che ciascun definizione evidenzia e rileva.
Dunque, alla classica imbarazzante domanda se il punto P appartiene o no all'angolo AVB nel caso dello schema seguente:



la risposta più corretta sarebbe: Dipende da come si definisce l'angolo; in molte delle precedenti definizioni, la risposta è negativa; in una di esse è positiva; in altre la domanda non ha neppure senso. Ovviamente questa considerazione vale per tutti gli oggetti matematici; per esempio, in Sbaragli (2003) si studia l'oggetto "punto".

Se si va per Paesi e per scuole, può essere utile sapere che, mentre in Italia domina la definizione che chiama in causa la parte di piano (illimitata), in altri Paesi, specie americani, domina quella di Hilbert, anche nella scuola primaria.
Se una delle definizioni fosse epistemologicamente più conveniente, o più facile, o più vicina all'oggetto…, allora si dovrebbe fare di tutto per proporla e renderla universale; francamente non ci pare sia il caso: ognuna delle precedenti definizioni presenta dei problemi addirittura di

accettazione intuitiva; abbiamo dimostrato che tutte le definizioni che la storia ha creato sono contemporaneamente presenti, a livello intuitivo, fra gli studenti intervistati: a fronte di un oggetto matematico unico, si vede come esistano varie interpretazioni e vari modelli che tendono a rappresentare caratteristiche di quell'oggetto.

La scelta in àmbito scolastico porta ad una terna che sempre viene esaminata quando si discute di trasposizione didattica:

- il Sapere (l'angolo, nelle sue diverse accezioni) da un punto di vista matematico vero e proprio;
- quel sapere che viene scelto come sapere da insegnare;
- quel sapere personale che ciascun allievo basa sulla propria esperienza, un sapere sul quale è necessario fondare ogni studio relativo alla trasposizione didattica.

A volte i saperi in gioco sono addirittura contrastanti; a volte ciò è dovuto al fatto che l'insegnante crede che vi sia una sola concettualizzazione possibile dell'oggetto matematico (in questo caso "angolo") e, di conseguenza, una sola definizione.

Occorre dunque relativizzare le attese degli insegnanti; può darsi che la definizione proposta istituzionalmente in aula contrasti con l'immagine intuitiva che lo studente si è già costruito, quasi sempre o sempre grazie ai contesti d'uso esterni alla scuola. Nel proporre una definizione, occorre vagliare bene le difficoltà che avrà lo studente a cancellare o a superare la propria immagine intuiva, forse già modello, e sostituirla con quella proposta dall'insegnante.

Occorre relativizzare anche la ricerca didattica e non credere dunque che eventuali risposte "errate" alle richieste che prevedono implicitamente un unico modello siano davvero "errate" e non siano invece, in modalità assai più interessante, l'evidenziazione di un conflitto tra un modello intuitivo già formato e quello che si tenta di opporre.

Un approccio pragmatista costringe a relativizzare proposte e risposte: è allo stato attuale il miglior veicolo filosofico possibile; la scelta di un atteggiamento realista porta difficoltà didattiche a non finire (D'Amore, Fandiño Pinilla, 2001; D'Amore, 2003).

Se è vero che la definizione di un oggetto matematico dovrebbe essere il risultato di mediazioni e negoziazioni all'interno di una comunità di pratiche, occorre allora che ciascuno dei componenti la comunità porti il suo contributo personale, secondo le proprie convinzioni, negoziando i saperi nella microsocietà classe e giungendo, auspicabilmente, ad un

sapere condiviso. Sottolineiamo la parola “ciascuno” perché attualmente le scelte relative alle definizioni dei concetti matematici e alle rappresentazioni semiotiche attraverso le quali vengono mostrati individuano intese che non vedono coinvolti i soggetti che devono disambiguare la rappresentazione e oggettivare l’oggetto, ma solo coloro che tentano una trasposizione; non sono i soggetti in fase di apprendimento che vengono chiamati a intendersi a proposito di una rappresentazione, ma individui competenti che non hanno più bisogno di rappresentazioni per poter oggettivare l’idea. «L’oggettivazione dell’oggetto significa riflessione sull’oggetto secondo le forme dell’attività matematica: l’oggetto appare come ri-flessione nella coscienza individuale di ciò che è *già* iscritto nella cultura» (Radford, 2005).
Il soggetto che ha interesse a disambiguare non è coinvolto nella scelta e subisce le scelte fatti da chi si occupa di trasposizione del sapere. Non possiamo affermare, quindi, che il sapere, oggetto della discussione in una classe intesa come comunità di pratiche, sia realmente condiviso. Possiamo supporre che sia il risultato di una mediazione fatta dall’insegnante che vuole condurre i propri allievi verso quel sapere condiviso dagli adulti, dagli insegnanti, dai matematici, da adulti appartenenti ad una determinata cultura e che personalmente condivide e che il soggetto in fase di apprendimento sia tenuto a debita distanza da tali negoziazioni.

Abbiamo usato le interviste precedenti solo per corroborare il fatto che volevamo dimostrare e cioè che tutte le definizioni sono presenti negli allievi, sia prima della loro introduzione scolastica, sia dopo e, spesso, indipendentemente da essa; ma molte di tali interviste si potrebbero leggere in modo assai più approfondito. Non solo, alcune interviste si potrebbero leggere ed interpretare in modo diverso da quello proposto da noi. Noi avevamo uno scopo che abbiamo tenuto fermo nella interpretazione delle risposte degli intervistati, ma, cambiando scopo e prospettiva, alcune risposte potrebbero dire di più di quanto abbiamo proposto noi. Ma questo fatto, nelle interviste di esseri umani (di bambini, poi!), è naturale.
Prendiamo in esame, a mo’ di esempio quello che abbiamo chiamato:

Ulteriore esempio di intervista che rivela il modello 4 nel caso b
Soggetto intervistato: L., età: 12 anni, classe frequentata: I media

e rileggiamolo con cura.
I. disegna due angoli come nel caso a e chiede come sono i due angoli fra loro. L. afferma che ce n'è uno più grande e uno più piccolo.
I.: Come puoi essere sicuro del fatto che questo è davvero più grande?
L.: Bisognerebbe misurarli.
I.: Misurali.
L.: Non posso, qui non c'è un goniometro.
I.: Potresti trovare un altro strumento o un sistema diverso per misurali.
L.: No.
I.: Sei sicuro?
L.: La professoressa ha detto che ci vuole il goniometro.

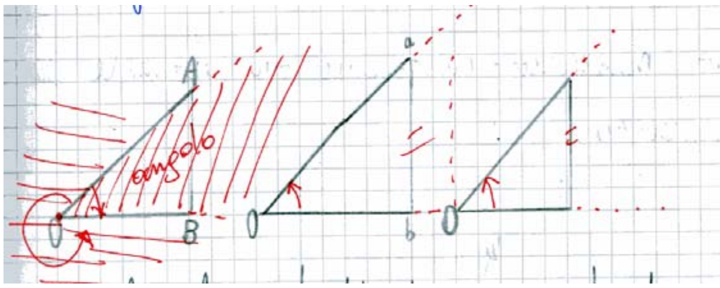
È evidente che lo studente, in questa prima fase, non sta dando le risposte che vorrebbe poter liberamente dare, in base ai propri modelli intuitivi, ma si sforza di assecondare le richieste dell'adulto, uniformandole a quelle che avrebbe probabilmente voluto sentire la professoressa. Ci sono in gioco: contratto didattico e contratto sperimentale (D'Amore, 1999a).

I.: Non pensare alla professoressa. Tu come faresti?
L.: Io potrei prendere il righello, ma la professoressa mi ha cancellato tutto con la penna rossa.
I.: Che vuoi dire?
L.: Io potrei fare una linea che segna la distanza dei lati dell'angolo e poi misurare quanto è lunga.
I.: Fallo!
[Inviti espliciti come questo sono direttivi e chiamano in causa il contratto sperimentale, D'Amore, 1999a].
L. fa ciò che ha detto e dichiara che l'angolo più grande è quello che ha la distanza maggiore fra i due lati.

I.: Ah, bene.
L.: Sei sicura? La professoressa mi ha cancellato tutto.

L. vive un evidente conflitto (D’Amore, 1999a); da un lato viene assecondato dalla I. e cede alla richiesta di raccontare che cosa avrebbe fatto lui, se fosse stato libero di esprimersi a suo piacere costretto a fare riferimento alle attese dell’insegnante.

I.: Vuoi raccontarmi che cosa ti ha cancellato la professoressa?
L.: Te lo faccio vedere.
Mostra il suo quaderno.



L.: Vedi, io volevo dire la stessa cosa, ma la professoressa mi ha cancellato tutto con il rosso e mi ha detto che l’angolo è quella parte che non finisce mai.

L. mostra di non aver capito affatto quel che la professoressa voleva fargli vedere, c’è stato un totale fraintendimento; la professoressa voleva mostrargli, con una evidenziazione cromatica, una figura che illustrasse la definizione di angolo che lei ha in mente e che vorrebbe far cognitivamente costruire ai propri allievi; ma L. ha tutt’altro modello in mente e non ha capito neppure il senso della colorazione, interpretandolo come una cancellazione dei suoi tentativi.
Il modello intuitivo di L. è talmente lontano da quello preteso dalla sua professoressa, che non ha neppure gli strumenti per capire quel che la professoressa gli dice per convincerlo; una cosa è l’apprendimento e ben altra la produzione di sapere: la produzione di sapere dovrebbe risultare da «attività in comune, riflessive, mediate che sfociano nella creazione di concetti culturali (oggetti matematici, …), mentre l’apprendimento scolastico è il processo di trasformazione attiva degli oggetti culturali in oggetti di coscienza (…) attraverso *mezzi semiotici di oggettivazione*»

(Radford, 2005). In questo caso il processo non è avvenuto.

Che sugli angoli vi siano modelli totalmente differenti in gioco era secondo noi implicito in molte delle celebri ricerche didattiche sugli angoli, ma qui abbiamo toccato con mano il senso e ulteriori ragioni di queste difficoltà, che la ricerca ha evidenziato da decenni.
Il problema non si risolve scegliendo una definizione ed imponendola per poi meravigliarsi quando il concetto non è costruito, ma cercando quali siano le condizioni di partenza di ciascuno studente, condizioni la cui varietà, qui testimoniata in senso sincronico, è di grande interesse anche diacronico.

Bibliografia

Bagni G. T. (2006). *Linguaggio, storia e didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.

Bagni G. T. (2007). *Rappresentare la matematica*. Roma: Aracne.

Chevallard Y. (1985). *La transposition didactique*. Grenoble: La Pensée Sauvage. Deuxième édition.

Chevallard Y. (1991). Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique. *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble*. LSD2-IMAG, Université Joseph-Fourier, Grenoble.

Chevallard Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche antropologique. *Recherches en didactique des mathématiques.* 12, 1, 73-112.

D'Amore B. (1985). L'idea di "angolo" nell'antichità e la sua evoluzione. *Le scienze matematiche e il loro insegnamento*. 1, 6-18.

D'Amore B. (1998). Oggetti relazionali e diversi registri rappresentativi: difficoltà cognitive ed ostacoli. *L'educazione matematica.* 1, 7-28.

D'Amore B. (1999a). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.

D'Amore B. (1999b). Scolarizzazione del sapere e delle relazioni: effetti sull'apprendimento della matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 22A, 3, 247-276.

Duval R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives.* UPL, IREM Strasbourg. 5, 37-65.

D'Amore B. (2001a). Un contributo al dibattito su concetti e oggetti matematici: la posizione "ingenua" in una teoria "realista" vs il modello "antropologico" in una teoria "pragmatica". *La matematica e la sua didattica*. 1, 4-30.

D'Amore B. (2003). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica*. Bologna: Pitagora.
D'Amore B. (2005). Pratiche e metapratiche nell'attività della classe intesa come società. *La matematica e la sua didattica*. 3, 325-336.
D'Amore B., Fandiño Pinilla MI. (2001). Concepts et objects mathématiques. In: Gagatsis A. (ed) (2001). *Learning in Mathematics and Science and Educational Technology*. Atti del Third Intensive Programme Socrates-Erasmus, Nicosia, Università di Cipro, 22 giugno -–6 luglio 2001. Nicosia (Cipro): Intercollege. 111-130.
Duval R. (1996). Quale cognitivo per la Didattica della Matematica? *La matematica e la sua didattica.* 3, 250-269.
Duval R. (1999). L'apprendimento in matematica richiede un funzionamento cognitivo specifico? *La matematica e la sua didattica,*1, 17- 42.
Euclide (1970). *Elementi*. A cura di A. Frajese. Torino: UTET.
Fandiño Pinilla M. I., D'Amore B. (2006). *Area e perimetro. Aspetti concettuali e didattici.* Trento: Erickson.
Godino J.D., Batanero C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en didactiques des mathématiques.* 14, 3, 325-355.
Hilbert D. (1899). *Gründlagen der Geometrie*. Stuttgart: G. G. Teubner. [Noi facciamo riferimento all'edizione italiana: *Fondamenti della geometria*, a cura di Carlo F. Manara e P. Canetta, Milano: Feltrinelli, 1970].
Radford L. (1997). On Psychology, Historical Epistemology and the Teaching of Mathematics: Towards a Socio-Cultural History oh Mathematics. *For the Learning of Mathematics.* 17(1), 26-33.
Radford L. (2005). La generalizzazione matematica come processo semiotico. *La matematica e la sua didattica.* 2, 191-213.
Sbaragli S. (2003). La scoperta dell'importanza del contesto: il punto nei diversi àmbiti. *Bollettino dei Docenti di Matematica.* Bellinzona (Svizzera). 47. 49-58.

Gli autori di questo articolo esprimono i più sentiti ringraziamenti ai due anonimi referee che, ben al di là del loro compito, hanno voluto approfondire le critiche costruttive, costringendoli a ripensamenti, a letture più approfondite, a rianalizzare situazioni già date per note; il che ha certamente portato beneficio alla stesura finale del lavoro. Naturalmente eventuali manchevolezze sono imputabili agli autori.

Parole chiave: didattica della matematica; storia della definizione di angolo; oggetti matematici; formazione di concetti; modelli spontanei.